Les topos de Grothendieck comme 'ponts' unifiants en mathématiques

Olivia Caramello

IHÉS

14 décembre 2016

La "notion unificatrice" de topos

Dans cet éxposé le terme 'topos' signifiera toujours 'topos de Grothendieck'.

"C'est le thème du topos qui est ce "lit", ou cette "rivière profonde" où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes". Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques".

A. Grothendieck

Depuis ma thèse de doctorat je me suis attachée à élaborer une théorie et des techniques qui permettent de commencer à donner corps à la vision de Grothendieck en se fondant sur la notion de topos classifiant dégagée par les logiciens.

Les topos comme 'ponts' unifiants

Cette théorie, introduite dans le texte programmatique "*The unification of Mathematics via Topos Theory*" de 2010, permet d'exploiter la flexibilité technique inhérente à la notion de topos - plus précisément la possibilité de représenter les topos d'une multitude de façons différentes - pour construire des 'ponts' unifiants entre différentes théories mathématiques ayant des contenus sémantiques équivalents ou étroitement reliés.

Dans les dernières années, en plus de conduire à la résolution de problèmes ouverts depuis longtemps en logique catégorique, ces techniques générales ont engendré plusieurs applications non-triviales dans différents secteurs des mathématiques, et le potentiel de cette théorie a juste commencé d'être exploité.

En fait, ces 'ponts' se révèlent utiles non seulement pour relier entre elles des théories mathématiques différentes mais aussi pour étudier une théorie mathématique donnée à l'intérieur d'un domaine spécifique.

Quelques applications

- Théorie des modèles (interprétation et généralisation topos-théorique du théorème de Fraïssé)
- Théorie de la demonstration (nouveaux systèmes déductifs pour les théories géométriques)
- Algèbre (généralisation topos-théorique du formalisme Galoisien)
- Topologie (interprétation/génération de dualités de types de Stone et de Priestley)
- Analyse fonctionnelle (résultats sur les spectres de Gelfand et les compactifications de Wallman)
- Groupes reticulés et MV-algèbres (travaux avec mon étudiante de doctorat A. C. Russo)
- Structures cycliques introduites par A. Connes et C. Consani (travail sur les "théories cycliques" avec mon étudiant de master N. Wentzlaff)
- Géométrie algébrique (généralisation des motifs de Nori avec L. Barbieri-Viale et L. Lafforgue, et approche logique aux problèmes d'indépendance de ℓ)

Plan de l'exposé

- Préliminaires topos-théoriques
- La technique de 'construction de ponts' : les principes clé et la vision sous-jacente
- Analyse de quelques 'ponts' remarquables à la lumière de la théorie générale
- Perspectives futures

La nature multiforme des topos

Les topos sont des objets particulièrement multiforme, qui peuvent être étudiés avec profit de plusieurs points de vue différents.

En fait, un topos de Grothendieck peut être vu comme :

- un espace généralisé
- un univers mathématique
- une théorie modulo 'Morita-équivalence'

Rappelons brièvement chacun de ces différents points de vue.

Topos comme espaces généralisés

- La notion de topos a été introduite par A. Grothendieck au début des années soixante dans le but d'exporter des notions et constructions topologiques ou géométriques dans des contextes où il n'y avait pas d'espaces topologiques au sens strict.
- Grothendieck a réalisé que beaucoup de propriétés importantes des espaces topologiques X peuvent se reformuler naturellement comme des propriétés (invariantes) des catégories $\mathbf{Sh}(X)$ des faisceaux d'ensembles sur les espaces.
- Il définit donc les topos comme des catégories de faisceaux d'ensembles plus générales, en remplaçant l'espace topologique X par une paire $(\mathscr{C}, J)$ consistant en une (petite) catégorie $\mathscr{C}$ et une 'notion générale de recouvrement' J sur elle, et en considérant les faisceaux (dans un sens généralisé) sur cette paire :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed] \arrow[d, squiggly] & \mathbf{Sh}(X) \arrow[d, squiggly] \\ (\mathscr{C}, J) \arrow[r, dashed] & \mathbf{Sh}(\mathscr{C}, J) \end{tikzcd}$$

Les topos comme univers mathématiques

Une décennie plus tard, W. Lawvere et M. Tierney découvrirent qu'un topos peut non seulement être vu comme un espace généralisé mais aussi comme un univers mathématique dans lequel on peut faire des mathématiques de la même façon que dans le contexte classique des ensembles (avec la seule exception importante qu'il faut raisonner constructivement).

Cette découverte rendit possible en particulier de :

- Exploiter la 'flexibilité' inhérente à la notion de topos pour construire des 'nouveaux mondes mathématiques' ayant des propriétés particulières.
- Considérer les modèles de n'importe quelle théorie (du premier ordre) non seulement dans le contexte classique des ensembles mais à l'intérieur de chaque topos, et donc 'relativiser' les mathématiques.

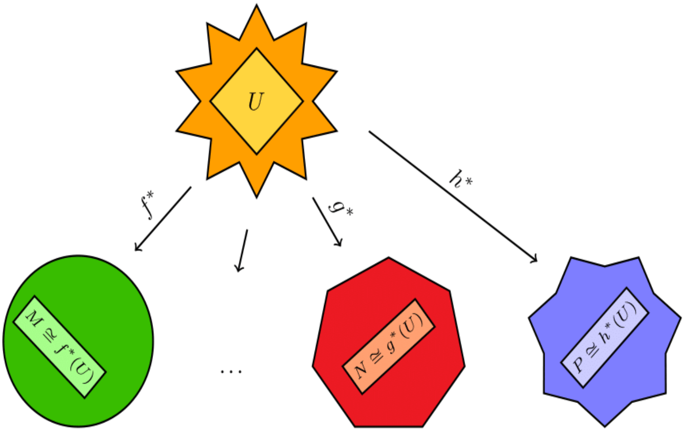
Les topos comme théories modulo 'équivalence de Morita'

Il a été réalisé dans les années '70 (grâce aux travaux de plusieurs catégoriciens, notamment W. Lawvere, G. Reyes, A. Joyal, M. Makkai, J. Bénabou et J. Cole) que :

- A toute théorie (géométrique du premier ordre) $\mathbb{T}$ on peut associer canoniquement un topos $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$, appelé son topos classifiant, qui représente son 'cœur sémantique'.
- Le topos $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$ est caractérisé par la propriété universelle suivante : pour tout topos de Grothendieck $\mathscr{E}$ on a une équivalence de catégories

$$\mathbf{Geom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}_{\mathbb{T}}) \simeq \mathbb{T}\text{-mod}(\mathscr{E})$$

naturelle en $\mathscr{E}$, où $\mathbf{Geom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}_{\mathbb{T}})$ est la catégorie des morphismes géométriques $\mathscr{E} \to \mathscr{E}_{\mathbb{T}}$ et $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathscr{E})$ est la catégorie des modèles de $\mathbb{T}$ dans $\mathscr{E}$.



Topos classifiant

Les topos comme théories modulo 'équivalence de Morita'

- Deux théories ont le même topos classifiant (à équivalence près) si et seulement si elles ont le même 'cœur semantique', c'est-à-dire si et seulement si elles sont indistinguables du point de vue sémantique ; deux telles théories sont dites Morita-équivalentes.

- Réciproquement, tout topos est le topos classifiant d'une théorie.

- Donc un topos peut être vu comme un représentant canonique d'une classe d'équivalence de théories modulo Morita-équivalence.

Les topos comme *ponts*

- La notion d'équivalence de Morita est omniprésente en mathématiques ; en effet, elle formalise dans beaucoup de situations la sensation de 'regarder la même chose de différentes manières' ou de 'construire un même objet mathématique par des méthodes différentes'.
- En fait, plusieurs dualités et équivalences importantes en mathématiques peuvent s'interpréter naturellement en termes de Morita-equivalences.
- D'autre part, la théorie des topos en elle-même est une source primordiale d'équivalences de Morita. En effet, les différentes représentations d'un même topos peuvent être interprétées comme des équivalences de Morita entre différentes théories.
- Deux théories bi-interprétables sont Morita-équivalentes mais, très remarquablement, la réciproque n'est pas vraie (voir mes travaux sur les MV-algèbres).
- De plus, la notion d'équivalence de Morita saisit le dynamisme intrinsèque inhérent à la notion de théorie mathématique ; en effet, une théorie mathématique donne lieu par elle-même à une infinité d'équivalences de Morita.

Les topos comme *ponts*

- L'existence de différentes théories ayant le même topos classifiant se traduit, au niveau technique, par l'existence de différentes représentations (en particulier, de différents sites de définition) d'un même topos.

- Des invariants des topos peuvent donc être utilisés pour transférer des informations d'une théorie à une autre :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathscr{E}_{\mathbb{T}} \simeq \mathscr{E}_{\mathbb{T}'} \arrow[dr, dashed, bend left] & \\
\mathbb{T} \arrow[ur, dashed, bend left] & & \mathbb{T}'
\end{tikzcd}
$$

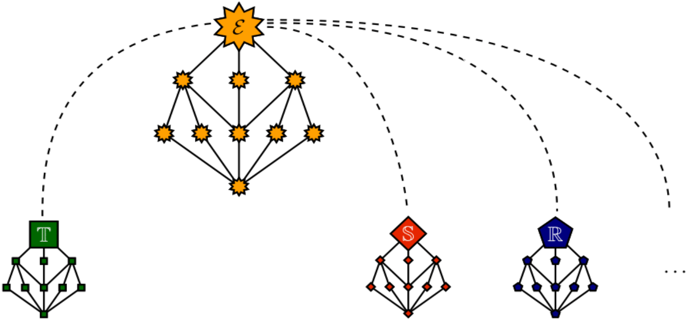
- Le transfert d'information se réalise en exprimant un invariant donné en termes des différentes représentations du topos.

Les topos comme *ponts*

- Ainsi, des propriétés (resp. constructions) différentes considérées dans le contexte de théories classifiées par un même topos apparaissent comme des *manifestations* différentes d'une *unique* propriété (resp. construction) qui vit au niveau des topos.
- Chaque invariant des topos se comporte dans ce contexte comme une 'paire de lunettes' qui permet de discerner de l'information 'cachée' dans l'équivalence de Morita considérée ; différents invariants permettent de transférer différentes informations.
- Cette méthodologie est techniquement efficace car la relation entre un topos et ses différentes représentations est souvent très naturelle, ce qui permet de transférer aisément des invariants entre differentes réprésentations (et donc entre differentes théories).
- Le niveau de généralité des invariants topos-théoriques est idéal pour saisir beaucoup d'aspects importants des théories mathématiques. En effet, des invariants importants du topos classifiant $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$ d'une théorie géométrique $\mathbb{T}$ se traduisent dans des propriétés logiques (syntactiques ou sémantiques) intéressantes de $\mathbb{T}$.

Les topos comme *ponts*

- Le fait que des invariants des topos se spécialisent en des propriétés ou constructions importantes, ayant un intérêt mathématique naturel, est une indication claire de la centralité de ces concepts en mathématiques. En fait, tout ce qui se passe au niveau des topos a des ramifications 'uniformes' à travers les mathématiques : par exemple



Cette figure représente la structure de treillis sur la collection des sous-topos d'un topos $\mathscr{E}$ qui induit des structures de treillis sur les collections de 'quotients' de théories géométriques $\mathbb{T}$, $\mathbb{S}$, $\mathbb{R}$ classifiées par $\mathscr{E}$.

La technique de 'construction des ponts'

- Tabliers des 'ponts' : équivalences de Morita (ou plus généralement morphismes de topos ou autres types de relations entre eux)
- Arches des 'ponts' : Caractérisation en termes de sites (ou plus généralement expression d'invariants des topos en termes de leurs différentes représentations)

I invariant par l'équivalence de Morita

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) \simeq \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, K)$$

caractérisation de I en termes du site

caractérisation de I en termes du site

$(\mathcal{C}, J)$ Propriété $P_{(\mathcal{C},J)}$

$(\mathcal{D}, K)$ Propriété $Q_{(\mathcal{D},K)}$

Ce 'pont' donne une équivalence logique (ou un autre type de relation logique) entre les propriétés 'concrètes' $P_{(\mathscr{C},J)}$ et $Q_{(\mathscr{D},K)}$, interprétées dans ce contexte comme des manifestations d'une unique propriété I qui vit au niveau des topos.

Quelques exemples de 'ponts'

Discutons quelques 'ponts' établis dans le contexte des applications mentionnées au début de l'exposé :

- Théories de type préfaisceau
- Théorème de Fraïssé topos-théorique
- Théorie de Galois topologique
- Dualités de type de Stone
- Ponts entre groupes réticulés et MV-algèbres

Ces résultats sont complètement *différents*... mais la méthodologie sous-jacente est toujours la *même* !

Théories de type préfaisceau

Définition

Une théorie géométrique est dite de type préfaisceau si elle est classifiée par un topos de préfaisceaux.

Les théories de type préfaisceau sont très importantes car elles constituent les 'briques de base' à partir desquelles toute théorie géométrique peut être construite. En effet, comme tout topos de Grothendieck s'écrit comme sous-topos de topos de préfaisceaux, toute théorie géométrique est 'quotient' de théories de type préfaisceau.

Toute théorie algébrique finitaire est de type préfaisceau, mais la classe des théories de ce type contient beaucoup d'autres théories mathématiques intéressantes.

Toute théorie $\mathbb{T}$ de type préfaisceau possède deux représentations différentes de son topos classifiant qui peuvent être utilisées pour construire des 'ponts' reliant sa syntaxe et sa sémantique :

$$[\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set}), \mathbf{Set}] \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$$

$$\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}} \qquad\qquad (\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$$

Ici, $\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})$ est la catégorie des modèles finiment présentables de $\mathbb{T}$ et $(\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$ est le site syntactique de $\mathbb{T}$.

Théories de type préfaisceau

Voici deux exemples de théorèmes obtenus en appliquant la technique des ‘ponts’ :

Théorème

Soit $\mathbb{T}$ une théorie de type préfaisceau sur une signature Σ. Alors

(i) *Tout modèle ensembliste finiment présentable de $\mathbb{T}$ est présenté par une formule géométrique $\mathbb{T}$-irréductible $\phi(\vec{x})$ sur Σ ;*

(ii) *Réciproquement, toute formule géométrique $\mathbb{T}$-irréductible $\phi(\vec{x})$ sur Σ présente un modèle ensembliste de $\mathbb{T}$.*

En fait, la catégorie $f.p.\mathbb{T}\text{-}mod(\textbf{Set})^{op}$ est équivalente à la sous-catégorie pleine $\mathscr{C}_{\mathbb{T}}^{irr}$ de $\mathscr{C}_{\mathbb{T}}$ sur les formules $\mathbb{T}$-irréductibles.

Objet irréductible

$[\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\textbf{Set}), \textbf{Set}] \simeq \textbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$

$\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\textbf{Set})^{\text{op}}$

Tout objet

$(\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$

Formule

$\mathbb{T}$−irréductible

Théories de type préfaisceau

Théorème

Soit $\mathbb{T}$ une théorie de type préfaisceau. Supposons qu'il nous soit donné, pour tout modèle ensembliste finiment présentable $\mathcal{M}$ de $\mathbb{T}$, un sous-ensemble $R_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}^n$ de telle façon que tout homomorphisme de $\mathbb{T}$-modèles $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ envoie $R_{\mathcal{M}}$ dans $R_{\mathcal{N}}$. Alors il existe une formule géométrique $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ qui, pour tout $\mathbb{T}$-modèle finiment présentable $\mathcal{M}$, définisse le sous-ensemble $R_{\mathcal{M}}$.

Sous-objet de $UA_1 \times \cdots \times UA_n$

$[\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\textbf{Set}), \textbf{Set}] \simeq \textbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$

$\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\textbf{Set})^{\text{op}}$

Corréspondence fonctorielle

$M \to R_M \subseteq MA_1 \times \cdots \times MA_n$

$(\mathscr{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}})$

Formule géométrique

$\phi(x_1^{A_1}, \ldots, x_n^{A_n})$

Théorème de Fraïssé topos-théorique

Le résultat suivant, qui généralise le théorème de Fraïssé en théorie classique des modèles, découle d'un triple 'pont'.

Définition

Un modèle ensembliste M d'une théorie géométrique $\mathbb{T}$ est dit homogène si pour toute flèche $y : c \to M$ dans $\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})$ et toute flèche $f : c \to d$ dans $f.p.\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})$ il existe une flèche $u : d \to M$ dans $\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})$ telle que $u \circ f = y$:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "y"] \arrow[d, "f"'] & M \\ d \arrow[ur, dashed, "u"'] & \end{tikzcd}$$

Théorème

Soit $\mathbb{T}$ une théorie de type préfaisceau telle que la catégorie $f.p.\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})$ soit non-vide et satisfasse AP et JEP. Alors la théorie $\mathbb{T}'$ des $\mathbb{T}$-modèles homogènes est complète et atomique ; en particulier, en supposant l'axiome du choix dénombrable, tous les $\mathbb{T}'$-modèles ensemblistes dénombrables sont isomorphes.

Théorème de Fraïssé topos-théorique

Topos atomique

$$\mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$$

$(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at})$
Site atomique i.e. AP sur f.p.$\mathbb{T}$-mod($\mathbf{Set}$)

$(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$
Atomicité de $\mathbb{T}'$

Topos bivalent

$$\mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$$

$(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at})$
JEP sur f.p.$\mathbb{T}$-mod($\mathbf{Set}$)

$(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$
Complétude de $\mathbb{T}'$

Point de

$$\mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$$

$(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at})$
$\mathbb{T}$-modèle homogène dans $\mathbf{Set}$

$(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$
$\mathbb{T}'$-modèle dans $\mathbf{Set}$

Théorie de Galois topologique

Théorème

Soit $\mathbb{T}$ une théorie de type préfaisceau telle que la catégorie $f.p.\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})$ des modèles finiment présentables satisfasse AP et JEP, et soit M un modèle $f.p.\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})$-universel et $f.p.\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})$-ultrahomogène de $\mathbb{T}$. Alors on a une équivalence de topos

$$\mathbf{Sh}(f.p.\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})^{op}, J_{at}) \simeq \mathbf{Cont}(Aut(M)),$$

où $Aut(M)$ est muni de la topologie de la convergence point par point.
Cette équivalence est induite par le foncteur

$$F : f.p.\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})^{op} \to \mathbf{Cont}(Aut(M))$$

qui envoie tout modèle c de $f.p.\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})$ sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})}(c, M)$ (muni de l'action évidente de $Aut(M)$) et toute flèche $f : c \to d$ dans $f.p.\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})$ sur l'application $Aut(M)$-équivariante

$$- \circ f : \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})}(d, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})}(c, M) .$$

Théorie de Galois topologique

Le résultat suivant est le fruit de deux ponts, respectivement obtenus en considérant les notions invariantes d'atome et de flèche entre des atomes.

Théorème

Sous les hypothèses du dernier théorème, le foncteur F est pleinement fidèle si et seulement si toute flèche de $f.p.\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})$ est un monomorphisme strict, et c'est une équivalence sur la sous-catégorie pleine $\mathbf{Cont}_t(Aut(M))$ de $\mathbf{Cont}(Aut(M))$ sur les actions transitives si de plus $f.p.\mathbb{T}\text{-}mod(\mathbf{Set})$ est atomiquement complète.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbf{Sh}(\mathrm{f.p.}\mathbb{T}\text{-}\mathrm{mod}(\mathbf{Set})^{\mathrm{op}}, J_{at}) \simeq \mathbf{Cont}(Aut(M)) \arrow[dl, dash, dashed] \arrow[dr, dash, dashed] & \\
\mathrm{f.p.}\mathbb{T}\text{-}\mathrm{mod}(\mathbf{Set})^{\mathrm{op}} & & \mathbf{Cont}_t(Aut(M))
\end{tikzcd}$$

Ce théorème généralise la théorie des catégories galoisiennes de Grothendieck et peut s'appliquer pour obtenir des théories de type galoisien dans différents domaines des mathématiques, par exemple celui des groupes finis et celui des graphes finis.

Dualités de type de Stone

Toutes les dualités ou équivalences de type de Stone entre des sortes particulières de préordres, de locales ou d'espaces topologiques peuvent être obtenues en fonctorialisant des 'ponts' de la forme

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Sh}(\mathscr{C}, J_{\mathscr{C}}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{D}, K_{\mathscr{D}}) \arrow[dl, dash, dashed] \arrow[dr, dash, dashed] & \\
\mathscr{C} & & \mathscr{D}
\end{tikzcd}
$$

où $\mathscr{D}$ est une sous-catégorie $J_{\mathscr{C}}$-dense d'une catégorie $\mathscr{C}$ définie par un préordre. Par exemple, on peut prendre pour $\mathscr{D}$ une algèbre de Boole et pour $\mathscr{C}$ le treillis des ouverts de son espace de Stone pour la dualité de Stone, ou bien pour $\mathscr{C}$ une algèbre de Boole atomique complète et pour $\mathscr{D}$ la collection de ses atomes pour la dualité de Lindenbaum-Tarski.

La méthode permet d'engendrer beaucoup de nouvelles dualités pour d'autres sortes de structures pré-ordonnées (par exemple, une dualité localique pour les semi-treillis d'intersection, une dualité pour les k-repères, une dualité pour les treillis disjonctement distributifs, une dualité pour les pré-repères engendrés par leurs éléments directement irréductibles etc. Elle se généralise aussi naturellement au cadre des catégories arbitraires.

Ponts entre groupes réticulés et MV-algèbres

Avec mon étudiante de doctorat A.C. Russo, nous avons :

- Relevé en des équivalences de Morita deux équivalences de catégories bien connues entre des classes de MV-algèbres et des classes de groupes réticulés abéliens, à savoir :
  - Equivalence de Mundici :

    catégorie des MV-algèbres $\simeq$ catégorie des ℓ-groupes avec unité forte
  - Equivalence de Di Nola-Lettieri :

    catégorie des MV-algèbres parfaites $\simeq$ catégorie des ℓ-groupes
- Appliqué la technique des 'ponts' à ces équivalences de Morita
- Construit (par l'étude de certains topos classifiants) une nouvelle classe de (Morita-)équivalences qui contient en particulier celle qui relève l'équivalence de Di Nola-Lettieri

Résultats concernant l'équivalence de Mundici

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathscr{E}_{\mathbb{MV}} \simeq \mathscr{E}_{\mathbb{L}_u} \arrow[dl, dashed, no head] \arrow[dr, dashed, no head] & \\
\mathbb{MV} & & \mathbb{L}_u
\end{tikzcd}
$$

- La théorie $\mathbb{L}_u$ des ℓ-groupes avec unité forte est de type préfaisceau et en fait Morita-équivalente à une théorie algébrique (celle des MV-algèbres)
- Correspondance bijective entre les quotients de la théorie $\mathbb{MV}$ des MV-algèbres et ceux de la théorie géométrique $\mathbb{L}_u$ des ℓ-groupes avec unité forte (bien que ces deux théories ne soient pas bi-interprétables)
- Caractérisation des ℓ-u groupes finiment présentables
- Forme de compacité et de complétude pour la théorie $\mathbb{L}_u$ (malgré la nature infinitaire de cette théorie) ;
- Version faisceautique de l'équivalence de Mundici

Perspectives futures

Les résultats obtenus jusqu'à présent montrent que les topos peuvent jouer efficacement le rôle d'espaces unifiants pour transférer de l'information entre théories mathématiques différentes et engendrer de nouvelles équivalences, dualités et symétries à travers divers secteurs des mathématiques.

Les topos ont en effet un véritable pouvoir créateur en mathématiques au sens que leur étude dégage naturellement, et dans des contextes mathématiques les plus divers, un grand nombre de notions et résultats 'concrets' qui sont pertinents mais souvent insoupçonnés.

Nous comptons poursuivre la recherche à la fois sur le plan théorique et sur celui appliqué pour continuer à développer le potentiel des topos comme outils fondamentaux dans l'étude des théories mathématiques et de leurs relations, et surtout comme concept "clé" définissant une nouvelle manière de faire des mathématiques susceptible d'apporter un éclairage unique sur un grand nombre de sujets différents.

Perspectives futures

Des thèmes centraux dans ce programme seront les suivants :

- étude de dualités ou correspondances importantes en mathématiques d'un point de vue topos-théorique (en particulier, la théorie des motifs, la théorie du corps de classes et le programme de Langlands)
- étude systématique des invariants des topos en termes de leurs présentations, et introduction de nouveaux invariants qui saisissent des aspects importants de problèmes mathématiques concrets
- interprétation et généralisation de parties importantes de la théorie de modèles (à la fois classique et moderne) en termes de topos et développement d'une théorie fonctorielle des modèles
- introduction de nouvelles méthodologies pour engendrer des équivalences de Morita
- développement de techniques générales pour construire des spectres en utilisant les topos classifiants.
- généralisation de la technique des 'ponts' au contexte des catégories et topos supérieurs en élaborant une logique géométrique d'ordre supérieur
- développement d'une théorie des topos classifiants relative